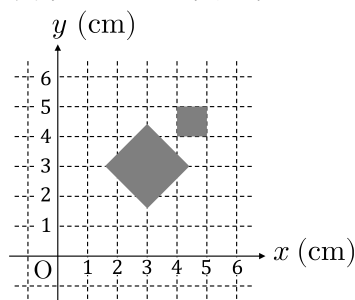


## 第1問 解答例

問1 以下のような図が描けていれば正解とする。



問2 以下の解答例のほか、同じ模様が描ける解答は正答とする。

解答例1

Init() → Trans(3,3) → Draw(2) → Trans(1,-1) → Rot(-45) → Draw(1) → Trans(-2,2)  
→ Rot(180) → Draw(1)

解答例2

Init() → Rot(135) → Trans(2,4) → Draw(1) → Rot(-135) → Trans(1,-1) →  
Draw(2) → Rot(-45) → Trans(1,-1) → Draw(1)

問3 以下の点を評価する。

- 図6を描ける命令になっているか。
- 考え方を適切にわかりやすく述べているか。
- 条件を満たしているか。少なくとも(1)の方が命令数が少なく、(2)の方が移動距離が短くなっているか。

(1) Trans 命令と Draw 命令の数を減らすことはできないので、同じ向きの正方形を連続して描き Rot 命令の数を最少の1にすることで命令の数が最少になる。よって、以下の順序で命令を送ればよい。

Init() → Draw(1) → Trans(4,0) → Draw(1) → Trans(4,0) → Draw(1) →  
Rot(-45) → Trans(2,0) → Draw(1) → Trans(-4,0) → Draw(1) → Trans(-4,0)  
→ Draw(1)

- (2) 開始地点 (0,0) から終了地点 (10,0) まで後戻りせず移動しながら正方形を描くことで条件を満たす。よって、以下の順序で命令を送ればよい。

Init() → Draw(1) → Rot(-45) → Trans(2,0) → Draw(1) → Rot(45) → Trans(2,0)  
→ Draw(1) → Rot(-45) → Trans(2,0) → Draw(1) → Rot(45) → Trans(2,0)  
→ Draw(1) → Rot(-45) → Trans(2,0) → Draw(1)

## 第2問 解答例

問1  $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$ ,  $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$  より,  $\left(\frac{1}{3}\right)^4 < \left(\frac{1}{4}\right)^3$  である。

問2  $p = \left(\frac{1}{3}\right)^4$ ,  $q = \left(\frac{1}{4}\right)^3$  とおくと, 問1より  $p < q$  である。両辺を  $\frac{1}{12}$  乗しても大小関係は変わらないことに注意すると,  $p^{\frac{1}{12}} < q^{\frac{1}{12}}$  より  $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} < \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$  である。

問3 くじAで100回連続して当たりが出る確率は  $\left(\frac{1}{99}\right)^{100}$  であり, くじBで99回連続して当たりが出る確率は  $\left(\frac{1}{100}\right)^{99}$  である。この大小を比較するには, 一般に  $a$  と  $b$  を正の数として,  $\left(\frac{1}{a}\right)^b$  と  $\left(\frac{1}{b}\right)^a$  の大きさを比べることができればよい。それぞれ  $\frac{1}{ab}$  乗しても大小関係は変わらないので,  $\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{a}}$  と  $\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{b}}$  の大きさを比べればよい。ここで  $f(x) = x^x$  とおくと,  $\log f(x) = \log x^x = x \log x$  であるから, 両辺を微分して

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} = 1 + \log x$$

$$\therefore f'(x) = f(x)(1 + \log x) = x^x(1 + \log x)$$

となるので, 増減表は表2のようになる。

表2  $f(x) = x^x$  の増減表.

$x$	(0)	...	$\frac{1}{e}$	...	( $\infty$ )
$f'(x)$	( $-\infty$ )	-	0	+	( $\infty$ )
$f(x)$	(1)	$\searrow$	$\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$	$\nearrow$	( $\infty$ )

よって  $0 < x < \frac{1}{e}$  で  $f(x)$  は単調減少であるので,  $\frac{1}{100} < \frac{1}{99}$  より  $f\left(\frac{1}{100}\right) > f\left(\frac{1}{99}\right)$  であることがわかる。したがって

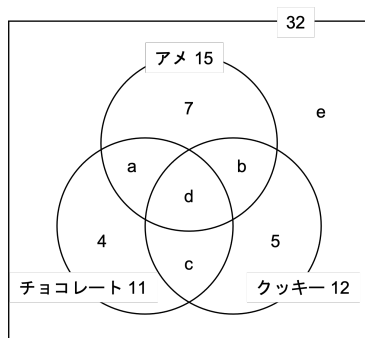
$$\left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{100}} > \left(\frac{1}{99}\right)^{\frac{1}{99}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{100}\right)^{99} > \left(\frac{1}{99}\right)^{100}$$

より, くじBで99回連続して当たりが出る確率の方が大きいことがわかる。

## 第3問 解答例

- 問 1  $Rev(0000, 1) = 0111, Rev(0111, 2) = 1100, Rev(1100, 3) = 0001,$   
 $Rev(0001, 4) = 1111$  となり, 4回のビット反転操作で 0000 を 1111 に変換できる。  
よって,  $Rev(Rev(Rev(Rev(0000, 1), 2), 3), 4) = 1111$  である。
- 問 2 1以上  $n$  以下の自然数  $i$  に対して,  $n$  ビット列  $A$  に  $i$ -ビット反転操作を適用すると,  $i$  番目以外はビットが反転する。つまり,  $i$  番目以外のビットは 0 ならば 1 に, 1 ならば 0 にすべてが変換される。また,  $i$ -ビット反転操作を 2 回適用すると元の  $A$  に戻る。つまり,  $Rev(Rev(A, i), i) = A$  を満たす。このことから, 1以上  $n$  以下の任意の自然数  $i$  について, 変換後の  $i$  番目のビットが 1 となるには  $i$  以外に奇数個のビットでビット反転操作が必要となる。つまり,  $i$  以外のビットが奇数存在しなければならないことを意味している。つまり,  $n$  は偶数でなければならないことになる。よって,  $n$  ビット列  $00 \cdots 0$  が  $11 \cdots 1$  に変換できるとき  $n$  の条件は偶数であることである。
- 問 3  $n$  を 2 以上の偶数とする。問 2 により, 各  $i$ -ビット変換操作は 1 回適用すればよいため,  $n$  ビット列  $00 \cdots 0$  の各位置  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) について, 1 から順に  $n$  まで  $i$ -ビット反転操作を繰り返し適用することで,  $00 \cdots 0$  を  $11 \cdots 1$  に変換できる。  
つまり,  
1)  $A$  を  $00 \cdots 0$  に初期化する  
2) 変数  $i$  が 1 から  $n$  まで次の  $i$ -ビット反転操作を繰り返す:  $A := Rev(A, i)$   
このアルゴリズムにより,  $n$  回のビット反転操作で  $00 \cdots 0$  を  $11 \cdots 1$  に変換することができる。また, 問 2 と同様の理由により,  $n$  より少ない回数で  $00 \cdots 0$  を  $11 \cdots 1$  に変換することはできないため,  $n$  が最小である。

## 第4問 解答例



問1 アメとなにかをもらったひと、クッキーとなにかをもらったひと、チョコレートとなにかをもらったひとが、アメ、クッキー、チョコレートのすべてをもらった人とは限らないので推論は正しいとはいえない。

アメ、クッキー、チョコレートをすべてもらった人は高々何人か調べる。アメとクッキーをもらい、チョコレートをもらわなかった人を  $a$  人、クッキーとチョコレートもらい、アメをもらわなかった人を  $b$  人、チョコレートとアメもらい、クッキーをもらわなかった人を  $c$  人、すべてをもらった人を  $d$  人、なにももらえなかった人を  $e$  人とする。このとき、次が成り立つ。

$$a + b + d + 7 = 15, \quad b + c + d + 5 = 12, \quad c + a + d + 4 = 11 \quad (1)$$

変数が4つ、式が3つの連立方程式となっているので、 $a, b, c$  を  $d$  で表す。いま、

$$a + b + c + \frac{3}{2}d = 11 \quad \because (1) \text{の全ての式を足して2で割る} \quad (2)$$

なので、

$$a = 4 - \frac{d}{2}, \quad b = 4 - \frac{d}{2}, \quad c = 3 - \frac{d}{2} \quad \because (1) \text{の式} - (2) \quad (3)$$

を得る。 $a, b, c, d$  は整数なので、 $d$  は偶数であることがわかる。このため、 $k$  を整数として、 $d = 2k$  とおくと、

$$a = 4 - k, \quad b = 4 - k, \quad c = 3 - k \quad (4)$$

となる。いま、 $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0$  であるから、 $0 \leq k \leq 3$  であることがわかる。 $d = 2k$  なので、すべてもらえる人は、高々6人である。(7人となることはない。)

問2 問1より、 $a = 4 - k, b = 4 - k, c = 3 - k$  であり、かつ  $0 \leq k \leq 3$  であることから、必ず  $a \geq 1, b \geq 1$  であることがわかる。「アメとクッキーをもらい、チョコレート

をもらわなかった人」と、「クッキーとチョコレートもらい、アメをもらわなかった人」は必ずいる。(少なくとも1人いる。)

**問 3** 問1より、なにももらえなかった人数は、

$$\begin{aligned} e &= 32 - \{7 + 5 + 4 + a + b + c + d\} \\ &= 32 - \{7 + 5 + 4 + (4 - k) + (4 - k) + (3 - k) + 2k\} = 5 + k \end{aligned}$$

となる。また、 $0 \leq k \leq 3$  であるから、なにももらえなかった人は高々 8 人である。